

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

6-дәріс. Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп

Дәрістің мақсаты – оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығын дәлелдеу

Негізгі сұрақтар:

1. Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің әлсіз қойылымы
2. Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есепке эквивалентті локалды емес тура есеп
3. Локалды емес тура есептің әлсіз және әлді шешімінің бар болуы
4. Локалды емес тура есептің әлсіз және әлді шешімінің жалғыздығы

1 Есептің қойылымы

Бұл дәрісте алдыңғы 3-4 дәрістерде қарастырылған (1.1)-(1.5) кері есебінің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы есептің берілгендеріне қойылған (1.18) шарттың көмегімен тұжырымдалады. Ол тек (1.1) теңдеулер жүйесінің оң жағын арнайы түрде $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) := \omega(\mathbf{x})$ деп жеке жағдайын қарастырған да ғана (1.18) шарттан құтылуға болады. Оң жағы арнайы түрдегі сызықты емес Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есепті қарастырайық

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \omega(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (1.4)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \omega d\mathbf{x} = e(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.5)$$

Айталық, 3 дәрістегі (1.9), (1.10) және

$$\omega \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.6)$$

шарттар орынды болсын.

Демек, қарастырылып отырған (1.1)-(1.5) кері есебіне эквивалентті $\mathbf{u}$ функциясын табуға арналған тура есеп келесі түрде болады, яғни (1.3) бастапқы және (1.4) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(s) ds + \nabla p = \\ F_3(\mathbf{u}, t) \omega(\mathbf{x}), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (1.7)$$

теңдеуді қанағаттандырады, мұндағы $F_3(\mathbf{u}, t)$ функционалы

$$\begin{aligned} F_3(\mathbf{u}, t) := \frac{1}{\omega_0} \left(e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} - \right. \\ \left. ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \omega)_{2,\Omega} ds \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

өрнегімен анықталады және $\omega_0 = \|\omega\|_{2,\Omega}^2 > 0$ тұрақты.

Лемма 1.1. Айталық, 3-дәрістегі (1.8)-(1.11) шарттар орындалсын. Онда (1.1)-(1.5) кері есебі (1.7), (1.3), (1.4) тура есебіне эквивалентті.

Дәлелдеуі 1.1. Бұл лемма аналогты түрде 3-дәрістегі 1.1-лемма секілді дәлелденеді.

Енді (1.7), (1.3), (1.4) тура есебінің әлсіз шешімінің бар болуы туралы келесі теорема орынды.

Теорема 1.1. Айталық, 3-дәрістегі (1.7), (1.11)-(1.12) және (1.6) шарттар орындалсын. Онда ақырлы $T_2 \in (0, T]$ уақыты табылып, 3-дәрістегі (1.79), (1.76), (1.77) локалды емес тура есебінің Q_{T_2} цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, сонымен бірге 1.1-лемма бойынша эквивалентті (1.1)-(1.5) кері есебінің де әлсіз шешімі бар болады және ол барлық $t \in (0, T_2]$ үшін (1.72) бағалауды қанағаттандырады, мұндағы T_2 мәні төменде (1.16) өрнекпен анықталады.

Дәлелдеуі 1.2. Жоғарыдағы тұжырым аналогты түрде алдыңғы 3-4 дәрістерде қарастырылған (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімділігі секілді (1.1)-(1.5) кері есебі үшін де дәлелденеді. Нақтырақ айтқанда, (1.7), (1.3), (1.4) тура есебінің әлсіз шешімі барлық $t \in (0, T]$ үшін 3-дәрістегі (1.72) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткілікті. Ал дәлелдеу алгоритмі 3-4 дәрістегі қарастырылған 1.1-теореманың дәлелдеуі секілді жүргізіледі.

Демек, (1.25) және (1.26) өрнектеріне аналогты энергетикалық теңдіктерге алып және оларды біріктірсек, онда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ & \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} ds - \\ & \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} ds + F_3(\mathbf{u}^n(t), t) e(t) + \\ & F_3(\mathbf{u}^n(t), t) e'(t) + ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (1.9)$$

теңдігі алынады, мұндағы $F_3(\mathbf{u}^n, t)$ функционалы (1.8) өрнекпен анықталған және

$$\begin{aligned} |F_3(\mathbf{u}^n, t)| & \leq \frac{1}{k_0} [|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}} (\varkappa \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + \\ & C^2(\Omega) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}) \Bigg]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

бағалауын қанағаттандырады.

Соңғы (1.9) теңдіктің оң жағын бағалау үшін ең алдымен, үшінші және төртінші қосылғыштарға, сәйкесінше, 3-дәрістегі (1.30) және (1.31) бағалауларды (1.10) өрнекпен бірге пайдаланып бағаласақ, онда келесі

$$\begin{aligned} |F_3(\mathbf{u}^n, t) e(t)| & \leq \frac{|e(t)|}{\omega_0} [|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}} (\varkappa \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + \\ & C^2 \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}) \Bigg] \leq \frac{1}{2\omega_0} (|e(t)|^2 + |e'(t)|^2) + \\ & \frac{\varkappa}{8} \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{2\varkappa |e(t)|^2}{\omega_0^2} \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\nu^2 |e(t)|^2}{2\omega_0^2} \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^4 \\ & + \frac{C^4}{2\omega_0^2} |e(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{2\omega_0^2} |e(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds. \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} |F_3(\mathbf{u}^n, t) e'(t)| & \leq \frac{|e'(t)|}{\omega_0} [|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}} (\varkappa \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + \\ & C^2 \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}) \Bigg] \leq \frac{1}{\omega_0} |e'(t)|^2 + \frac{\varkappa}{8} \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ & \frac{2\varkappa |e'(t)|^2}{\omega_0^2} \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\nu^2 |e'(t)|^2}{2\omega_0^2} \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^4 \\ & + \frac{C^4}{2\omega_0^2} |e'(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{2\omega_0^2} |e'(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds, \end{aligned} \quad (1.12)$$

теңсіздіктер қорытылады, сондай-ақ, $\varepsilon_1 := \frac{\varkappa}{2}$ жағдайда бірінші, екінші және бесінші қосылғыштарға, сәйкесінше, 3-дәрістегі (1.28), (1.29) және (1.32) бағалауларды ескерсек, онда

$$z(t) := 1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2$$

функциясы үшін келесі дифференциалдық теңсіздік шығады

$$\begin{aligned} z'(t) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \\ C_1 \int_0^t z(s) ds + C_2 z(t) + C_3 z^2(t) + C_4(t) \end{aligned} \quad (1.13)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} C_1 &:= \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(\frac{K_0^2}{\nu} + \frac{4k_0^2}{\varkappa} + 2 \right); \quad C_2 := \frac{2}{\nu + \varkappa}; \quad C_3 := \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(2 + \frac{4C^2(\Omega)}{\varkappa} \right) \\ C_4(t) &:= \frac{1}{\omega_0} \left(|e(t)|^2 + |e'(t)|^2 \right) + \frac{2}{\omega_0} |e'(t)|^2 + \\ &\frac{\|\omega\|_{\mathbf{V}}^2}{\omega_0^2} \left(|e(t)|^2 + |e'(t)|^2 \right) (4\varkappa + \nu^2 + C^4(\Omega) + K_0^2) \end{aligned}$$

Енді (1.13) өрнекті s бойынша 0-ден t -ға шейін интегралдап, 3-дәрістегі (1.24) өрнекті ескерсек, онда

$$\begin{aligned} z(t) + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_T)}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 \leq \\ C_5 \int_0^t z^2(s) ds + C_6, \end{aligned} \quad (1.14)$$

мұндағы

$$C_5 = \max \{C_1 T + C_3; C_2\}; \quad C_6 = 1 + \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}^2 + (\varkappa + \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_0^t C_4(s) ds.$$

Әрі қарай $z(t)$ функциясы үшін сызықтық емес Гронуолл теңсіздігін қолданғанда, онда (1.13) өрнектен келесі бағалау қорытылады

$$z(t) \leq \frac{C_6}{1 - C_5 C_6 t} \equiv K_2 < \infty \quad (1.15)$$

және төмендегі уақыт аралығы үшін орынды

$$0 \leq t \leq T_2 < T_* := \frac{1}{C_5 C_6}. \quad (1.16)$$

Демек, кез келген $t \leq T_2 < T_*$ үшін (1.15) өрнектен келесі бағалау орынды екенін көруге болады

$$\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq K_2. \quad (1.17)$$

(1.37) бағалауды (1.13) өрнектің оң жағына қолданып және $t \in [0, T_2]$ бойынша супремум алғанда, келесі априорлық бағалау тұжырымдалады

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T_2]} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T_2;\mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_{T_2})}^2 + \\ \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0,T_2;\mathbf{V})}^2 \leq C := C(\nu, \varkappa, T_2, K_2, C_5, C_6). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Теорема 1.2. Айталық, 1.1-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, (1.49) шарт орынды болсын. Онда (1.7), (1.3), (1.4) тура есебінің әлді шешімі бар болады, сонымен бірге 1.1-лемма бойынша оған эквивалентті (1.1)-(1.5) кері есебінің әлді шешімі табылады және ол барлық $t \in (0, T_2]$ үшін (1.73) бағалауды қанағаттандырады.

Дәлелдеуі 1.3. Демек, (1.52) өрнегіне аналогты энергетикалық теңдік келесі түрде болады

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ & - \left((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}^n(t), \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right) - \int_0^t K(t-s) \left(\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s), \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega} ds + \\ & F_3(\mathbf{u}^n, t) \left(\omega, -\tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega} := I_7, \end{aligned} \quad (1.19)$$

Соңғы өрнектің оң жағын бағалау үшін Гельдер мен Юнг теңсіздіктерін және (1.10) бағалауды бірге қолданайық, демек,

$$\begin{aligned} |I_7| \leq & \frac{\varkappa}{2} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{2\varkappa} \left[C \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \right. \\ & \left. K_0^2 \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_3|^2 \left\| \omega \right\|_{2,\Omega}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

(1.20) бағалауды (1.19) теңдікке ескергенде, келесі теңсіздік қорытылады

$$\begin{aligned} & \nu \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \frac{3}{\varkappa} \left[C \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ & \left. \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + K_0^2 \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_3|^2 \left\| \omega \right\|_{2,\Omega}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Енді (1.21) өрнекті s бойынша 0-ден t -ға шейін интегралдап және әлсіз шешім үшін алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегі интегралдық теңсіздік алынады

$$\nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds \leq C_7 + C_8 \int_0^t \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds, \quad (1.22)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} C_7 &:= \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_0 \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{\varkappa} \left\| \omega \right\|_{2,\Omega}^2 \int_0^{T_2} |F_3(s)|^2 ds < \infty, \\ C_8 &:= \frac{3}{\nu \varkappa} \left(C(\Omega) \sup_{t \in [0, T_2]} \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 T \right) < \infty. \end{aligned}$$

Мұнан кейін, (1.22) өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,

$$\left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu} C_7 e^{C_8 T_2}, \quad \forall t \in (0, T_2) \quad (1.23)$$

бағалауы қорытылады. Егер (1.22) өрнектің екі жағынан $t \in [0, T_2]$ бойынша супремум алып және (1.23) бағалауды қолдансақ, онда төмендегі бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t \in [0, T_2]} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2, \Omega}^2 + \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n \right\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_2})}^2 \leq C := C(\nu, \varkappa, C_7, C_8, T_2) < \infty. \quad (1.24)$$

Теорема 1.3. Айталық, 1.1-теореманың шарттары орындалсын. Онда (1.1)-(1.4), (1.8) есебінің әлсіз шешімі жалғыз болады.

Дәлелдеуі 1.4. Бұл тұжырымның дәлелдеуі 3-дәрістегі 1.3-теореманың дәлелдеуіне аналогты түрде тұжырымдалады.